SESIÓN 10

DERIVACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DIRECTAS

I. CONTENIDOS:
1. Derivadas de funciones trigonométricas directas
2. Ejercicios resueltos
3. Estrategias Centradas en el Aprendizaje: Ejercicios propuestos

II. OBJETIVOS:
Al término de la Clase, el alumno:
- Comprenderá los conceptos básicos de las funciones trigonométricas
- Derivará funciones trigonométricas

III. PROBLEMATIZACIÓN:
Comenta las preguntas con tu Asesor y selecciona las ideas más significativas.
- ¿Qué significado geométrico tienen las funciones trigonométricas en el cálculo?
- ¿Con que otra unidad se puede medir un ángulo aparte de los grados sexagesimales para su derivación?
- ¿En qué tipo de problemas se puede emplear la derivación de las funciones las funciones trigonométricas para su solución?

IV. TEXTO INFORMATIVO-FORMATIVO
1.1. Derivadas de funciones trigonométricas directas
Con el propósito que al estudiante se le facilite el estudio de esta lección es necesario que repase algunos tópicos de trigonometría, para elegir estos consulte con su asesor.

Hasta este momento hemos tratado en nuestro estudio del cálculo solo funciones algebraicas, siendo las trigonométricas otro tipo de funciones de nuestro interés, estas funciones tienen aplicaciones en la descripción de sucesos periódicos, como los ciclos empresariales, los movimientos ondulatorios, las vibraciones, los fenómenos eléctricos y los ciclos biológicos.

En el estudio de la geometría, un **ángulo** se puede definir como la unión de dos lados que tienen un punto común denominado **vértice.** Cualquier ángulo es congruente con alguno que tenga su vértice en el origen y un lado, el cual se denomina **lado inicial,** que esté situado sobre el eje positivo, bajo esta circunstancia decimos entonces que dicho ángulo se encuentra en su **posición normal**.

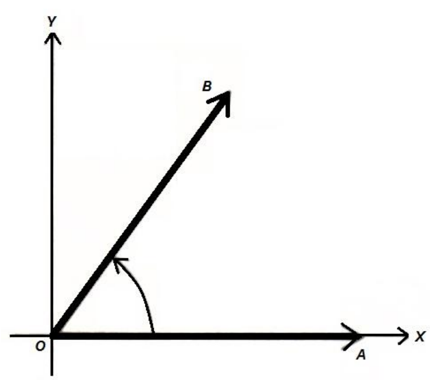


Fig. 1

Si vemos la figura anexa esta muestra un ángulo AOB en su posición normal, donde OA es su lado inicial, el otro lado, OB , se le denomina **lado terminal.**

El ángulo OAB se puede generar girando el lado OA hacia el lado OB el punto A rota sobre una circunferencia que tiene su centro en O y radio OA, con dirección al punto B.

Es común que al resolver problemas que comprendan los ángulos de triángulos por lo general sean medidos en grados sexagesimales. Sin embargo en cálculo diferencial los ángulos se miden en una unidad llamada *radián,* esto es debido a que se trata de funciones trigonométricas definidas en números reales.

La longitud de un arco de una circunferencia es empleada para definir la medida en radianes de un ángulo, a continuación se trata con más detalle este concepto.

Definición de la medida en radianes: Sea AOB un ángulo que se encuentra en posición normal, y hagamos $OA = \mathbf{1}$. Siendo s unidades la longitud del arco de la circunferencia trazada por el punto A en tanto que el lado inicial OA gira hacia el lado terminal OB, la medida en **radianes**, t, del ángulo AOB está definida por:

$t = s$ si la rotación está en el sentido contrario a las manecillas del reloj

$t = -s$ si la rotación se efectúa en el sentido de las manecillas del reloj

Es decir, un ángulo es positivo si se mide en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj y es negativo en caso contrario, esto es tomando como referencia para este movimiento el eje OX positivo del plano Cartesiano.

Un ángulo formado por una revolución completa de tal manera que el lado OA se haga coincidir con el lado OB, tendrá una medida de 360° lo que equivale a $\mathbf{2}\pi$ **radianes**, de esto podemos deducir las siguiente correspondencia entre una medida expresada en grados y su equivalente en radianes.

$$360° = \mathbf{2}\pi \; radianes \; (rad)$$

$$180° = \pi \; rad$$

De lo anterior es fácilmente deducible que:

$$1° = \frac{\mathbf{1}}{18\mathbf{0}}\pi \; rad$$ y también

$$1 \; rad = \frac{18\mathbf{0}}{\pi} \cong 57°18'$$

Para comprender mejor estos conceptos analice las figuras y tabla anexas.

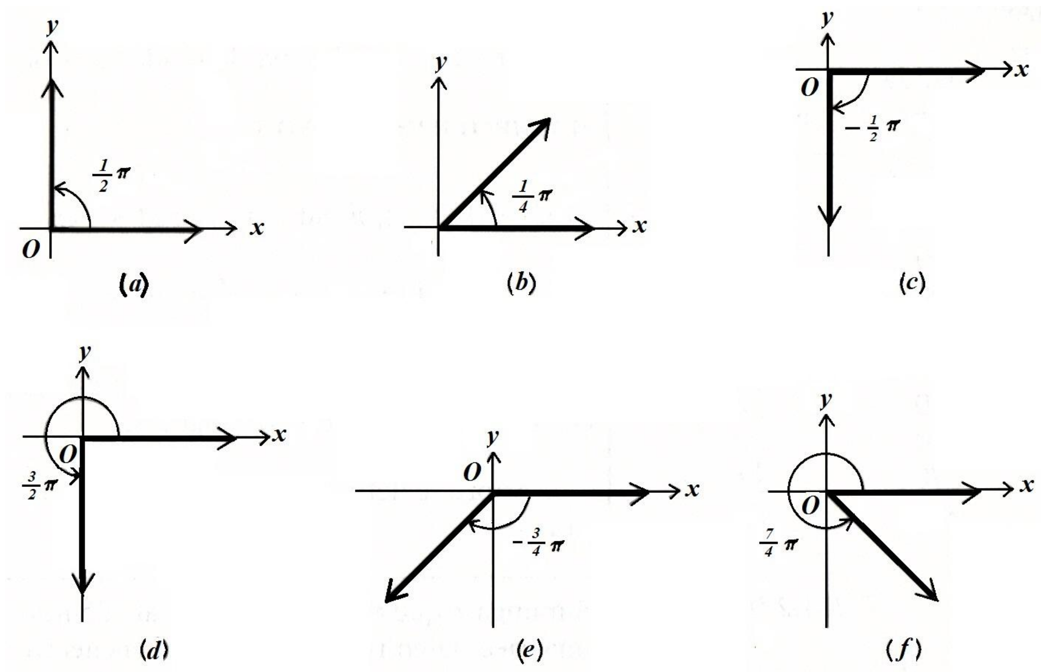


Fig. 2

Medida en grados	Medida en radianes
30	$\frac{1}{6}\pi$
45	$\frac{1}{4}\pi$
60	$\frac{1}{3}\pi$
90	$\frac{1}{2}\pi$
120	$\frac{2}{3}\pi$
135	$\frac{3}{4}\pi$
150	$\frac{5}{6}\pi$
180	π
270	$\frac{3}{2}\pi$
360	2π

Con lo anterior se pueden realizar las conversiones necesarias de un sistema de medidas a otro. La tabla anexa presenta las medidas en grados y su equivalente en radianes de algunos ángulos. En seguida se definirán las funciones *seno y coseno* de un número real. Para esto suponemos que tenemos un número real que designaremos con la letra *t.* Ahora consideremos un ángulo que tenga una medida en radianes *t,* el cual se encuentra en posición normal, y sea el punto *P* el de la intersección del lado terminal de ángulo con el círculo unitario que tiene como centro el origen. Si consideramos que el punto *P* tiene por coordenadas (x, y), entonces la **función coseno** queda definida de la siguiente forma:

$\cos t = x$

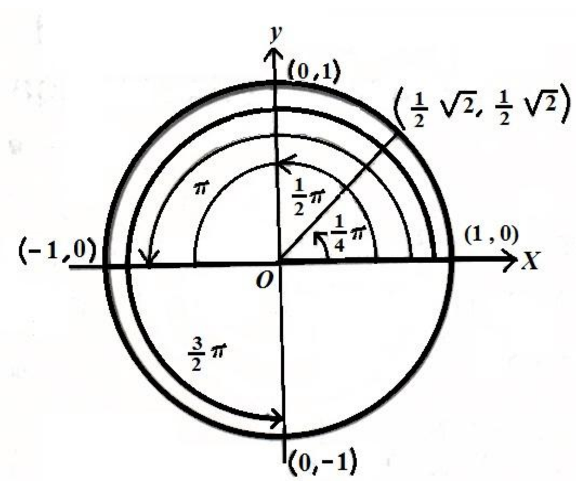
Bajo este mismo orden de ideas la **función seno** queda definida por:

$\sin t = y$

De la definición anterior podemos observar que $\sin t$ y $\cos t$ quedan definidos para cualquier valor de t. De lo anterior podemos establecer que el dominio de las funciones seno y coseno es el conjunto de todos los números reales. Es fácil ver que de acuerdo con las definiciones hechas que el valor más grande para cualquiera de estas dos funciones es 1 y el valor más pequeño es -1.
Para algunos valores de t, los valores de estas dos funciones se obtienen sin ninguna dificultad empleando un esquema. De la siguiente figura podemos observar que $\sin 0° = 0$ y el $\cos 0° = 1$

$\sin \frac{1}{4\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\cos \frac{1}{4\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ y de esta misma manera podemos encontrar los valores para otros ángulos. La tabla anexa nos resume estos resultados para algunos ángulos.

Fig. 3



x	sen x	cos x
0	0	1
$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}\pi$	1	0
$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
π	0	-1
$\frac{3}{2}\pi$	-1	0
2π	0	1

La ecuación de la circunferencia unitaria es $x^2 + y^2 = 1$, ya que $y = \sin t$ y $x = \cos t$ podemos deducir que $sen^2 t + cos^2 t = 1$ a esta ecuación se le llama identidad trigonométrica debido a que es válida para cualquier número real t .

Las figuras siguientes presentan ángulos que tienen una medida negativa en radianes la cual es igual a
$-t$, y otros ángulos correspondientes con una medida positiva en radianes igual a t, de estas figuras podemos deducir que $\sin(-t) = -\sin t$ y $\cos(-t) = \cos t$ estas ecuaciones se cumplen para cualquier número real t.

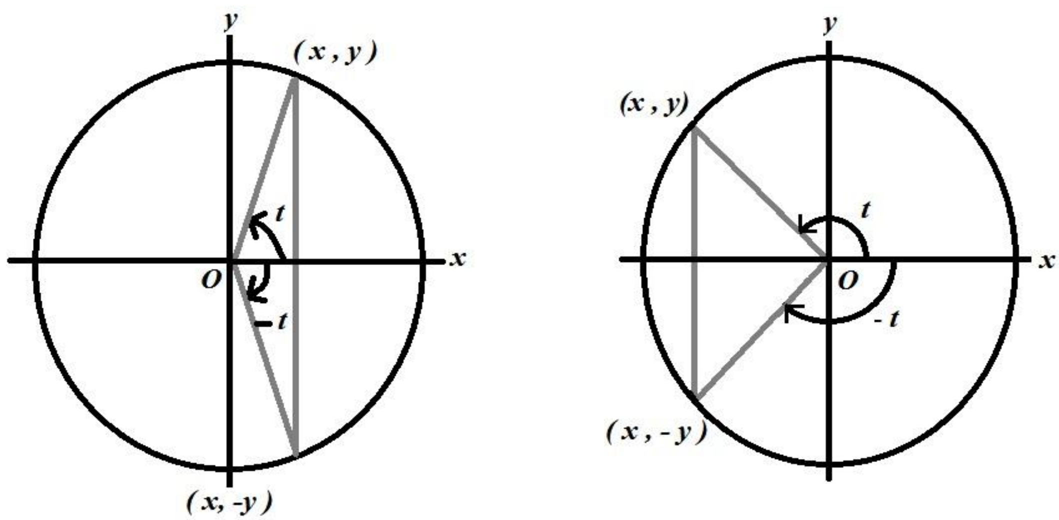


Fig. 4

Estas ecuaciones se cumplen para cualquier número real t debido a que los puntos donde los lados terminales de los ángulos que se miden en radianes t y $-t$ cortan al círculo unitario el cual tiene igual abcisa y ordenada que únicamente difieren en el signo, por esta razón a las ecuaciones anteriores se les considere identidades.

Es muy importante entender que de acuerdo con las definiciones anteriores que tanto la función seno como la función coseno son *funciones periódicas* cuyo periodo es 2π , matemáticamente esto lo podemos escribir de la siguiente forma:

$\sin(t + 2\pi) = \sin t$ y $\cos(t + 2\pi) = cost\ t$

La propiedad del seno y el coseno que establecen estas ecuaciones se le conoce como *perioricidad*, es decir, cuando el valor de t aumenta en un periodo (2π) el valor de y se repite.

La perioricidad de la función seno y coseno se puede comprender al analizar las siguientes gráficas

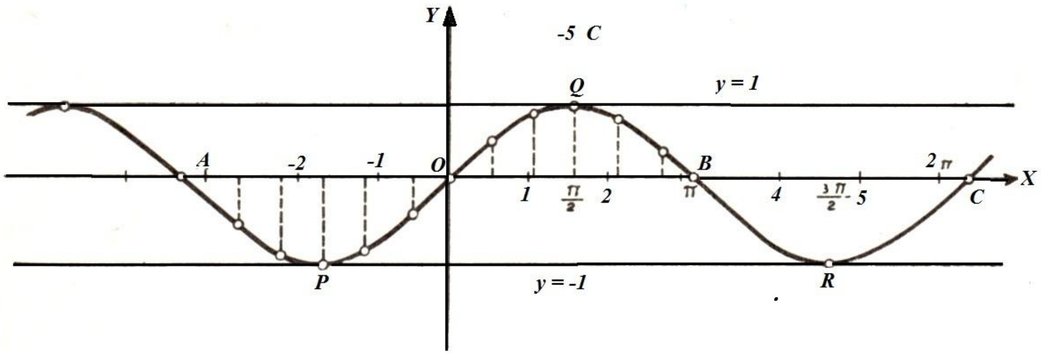


Fig. 5

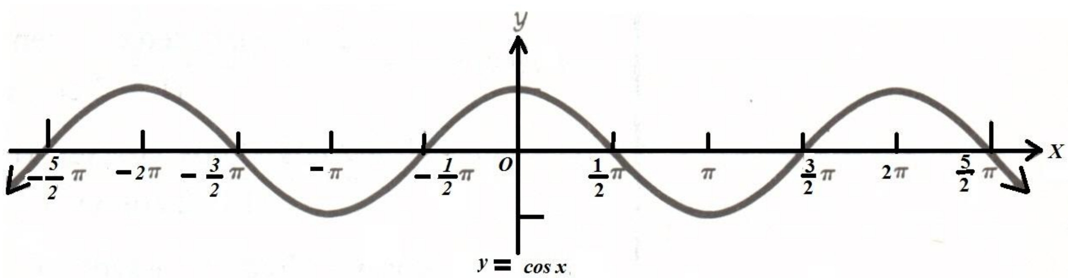


Fig. 6

La parte de la curva para valores de x desde cero hasta 2π, arco $OQBRC$ en la figura, puede desplazarse paralelamente a OX, hacia la derecha o hacia la izquierda, una distancia igual a un múltiplo cualquiera de periodo 2π, y en su nueva posición será una parte del lugar geométrico.
Al analizar con cuidado las gráficas anteriores vemos que se puede obtener la gráfica de la función coseno a partir de la gráfica de la función seno al trasladar el eje y, $\frac{1}{2}\pi$ de unidades a la derecha. *En otras palabras las funciones seno y coseno se encuentran desfasadas $90°$.*

Una vez entendidos estos conceptos básicos entremos a la derivación de estas funciones, a modo de ejemplo derivemos la función seno utilizando la regla general de los cuatro pasos, ya vista al derivar funciones algebraicas.

$y = \sin t$

$y + \Delta y = \sin(t + \Delta t)$ Aplicando la identidad trigonométrica $\sin(t + \Delta t) = \sin t \cos \Delta t + \sin \Delta t \cos t$

$y + \Delta y = \sin t \cos \Delta t + \sin \Delta t \cos t$

$-y = -\sin t$

$\Delta y = \sin t \cos \Delta t + \sin \Delta t \cos t - \sin t$ Factorizando, nos queda:

$\Delta y = \cos t \sin \Delta t - \sin t(1 - \cos \Delta t)$ Dividiendo ambos miembros por Δt, se tiene

$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \cos t\left(\frac{\sin \Delta t}{\Delta t}\right) - \sin t\left(\frac{1 - \cos \Delta t}{\Delta t}\right)$ De nuestro estudio sobre límites recordemos un límite

especial trigonométrico el cual se definió como: $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin \Delta t}{\Delta t} = 1$ y $\lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{1 - \cos \Delta t}{\Delta t}\right) = 0$, tenemos

$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \cos t(1) - \sin t(0)$, esto nos queda: $\frac{dy}{dt} = \cos t$ como $y = \sin t$, si hacemos $y = \sin t$ y

Aplicando la regla de la cadena nos queda finalmente:

I. $\frac{d}{dx}\sin t = \cos t\frac{dt}{dx}$

Esta fórmula se enuncia de la siguiente manera: *La derivada de la función seno de una variable es igual al producto de la función coseno de la variable por la derivada de la función.*

Para obtener las fórmulas de las demás funciones trigonométricas que se dan a continuación se sigue un proceso similar:

II. $\frac{d}{dx}(\cos t) = -\sin t\frac{dt}{dx}$

La derivada de la función coseno de una variable es igual a menos el producto de la función seno de la variable por la derivada de la variable.

Se deja como ejercicio para el estudiante que enuncie las fórmulas que se dan a continuación:

III. $\frac{d}{dx}(\tan t) = sec^2 t\frac{dt}{dx}$

IV. $\frac{d}{dx}(\cot t) = -csc^2 t\frac{dt}{dx}$

V. $\frac{d}{dx}(\sec t) = \sec t \tan t\frac{dt}{dx}$

VI. $\frac{d}{dx}(\csc t) = -\csc t \cot t\frac{dt}{dx}$

2.1. Ejercicios resueltos

1. Derive la función: $y = \sin(3x + 5)$

Solución. Podemos ver que la función tiene la ya conocida forma: $y = \sin u$ por lo que podemos hacer

$u = 3x + 5$, derivando tenemos: $\frac{du}{dx} = 3$ como $\frac{d}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$ entonces $\frac{dy}{dx} = \cos(3x + 5)(3)$

Quedando finalmente: $\frac{dy}{dx} = 3\cos(3x + 5)$ que es la derivada buscada

Nota: Es muy importante que el estudiante observe que el ángulo no puede ser multiplicar por la derivada de u .

2. Derive la función: $y = cos^3 x$

Solución: Esta función puede escribirse también como: $y = (\cos x)^3$ derivando tenemos

$\frac{dy}{dx} = 3\,(\cos x\,)^2\,\frac{d}{dx}\,(\cos x)$ haciendo $u = \cos x$ y $n = 3$ nos queda

$\frac{dy}{dx} = 3(cos^2 x)(-\sin x)$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -3\sin x\, cos^2 x$ que es la derivada buscada.

3. Derive la función: $y = x^2 \sin x$

Solución: Aplicando la fórmula para derivar un producto, se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = x^2\frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x\frac{d}{dx}(x^2)$$

$= x^2 \cos x + 2x\sin x$ Que es la derivada buscada

4. Derive la siguiente función: $y = \frac{\sec x}{1 + \tan x}$

Solución: Aplicando la fórmula para un cociente, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + \tan x)\frac{d}{dx}(\sec x) - \sec x\frac{d}{dx}\,(1 + \tan x)}{(1 + \tan x)^2}$$

$$= \frac{1+\tan x\sec x\tan x-\sec x\sec x^2}{(1+\tan x)^2}$$

$$= \frac{\sec x\,(\tan x + tan^2 x - sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}$$

$= \frac{\sec x(\tan x-1)}{(1+\tan x)^2}$ que es la derivada buscada.

3.1. ESTRATEGIAS CENTRADAS EN EL APRENDIZAJE: EJERCICIOS PROPUESTOS.
Derive las siguientes funciones

1. $y = \sin ax$ 2. $y = 3\cos 2x$ 3. $y = \tan 3x$ 4. $y = 2\tan\frac{x}{2}$ 5. $y = \sec 4x$ 6.- $y = \frac{1}{2}sin^2 x$

7. $y = \sin x + \cos x$ 8. $y = \cos 2x - 2\tan x$ 9. $y = x\csc x$ 10. $y = 2\cot x - \sqrt{x}\ \sec x$